

原模图LDPC码的一种联合优化算法

方毅¹, 王琳¹, 陈平平², 肖旻¹

1. 厦门大学通信工程系, 福建厦门 361005

2. 厦门大学电子工程系, 福建厦门 361005

摘要: 根据深空通信的特点及需求, JPL实验室提出了性能比常规奇偶校验码更优的原模图低密度奇偶校验码, 即原模图LDPC(low-density parity-check)码. 该文提出一种原模图LDPC码的联合优化算法, 在不增加编译码复杂度的前提下能兼顾瀑布区性能, 设计出地板区性能更好的码型. 理论分析和仿真结果表明, 用该算法设计出的新型重复积累码与新型重复-积累-重复码与传统码型(重复积累码和AR4JA码)相比, 可在高信噪比区域获得显著的编码增益, 降低了错误地板.

关键词: 原模图LDPC码; 优化算法; 编码增益; 误码率; 错误地板

中图分类号: TN911

文章编号: 0255-8297(2011)06-0551-08

Joint Optimization Algorithm for Protograph LDPC Codes

FANG Yi¹, WANG Lin¹, CHEN Ping-ping², XIAO Min¹

1. Department of Communication Engineering, Xiamen University, Xiamen 361005, Fujian Province, China

2. Department of Electronic Engineering, Xiamen University, Xiamen 361005, Fujian Province, China

Abstract: According to the requirements and characteristic of space communication, protograph low-density parity-check (LDPC) codes have been proposed by Jet Propulsion Laboratory (JPL), which have better performance than conventional LDPC codes. In this paper, we propose a joint optimization algorithm for protograph LDPC codes, aiming at lowering the error floor of protograph LDPC codes, while maintaining good performance at waterfall region without increasing encoding and decoding complexity. Theoretical analysis and simulation indicate that the repeat accumulate (RA) and accumulate repeat accumulate (ARA) codes designed by using the proposed algorithm have a remarkable coding-gain, and a lower error floor, as compared with the conventional RA and accumulated repeat by-4-jagged accumulate (AR4JA) codes at the high SNR region.

Keywords: protograph low-density parity-check codes, optimization algorithm, coding gain, bit error rate, error floor

Gallager所提出的低密度奇偶校验(low-density-parity-check, LDPC)码^[1]是一类性能优越的纠错码^[2], 该码在信度传播(belief propagation, BP)译码算法下的性能非常接近香农限, 并已广泛应用于各种通信标准. 目前, 一些学者分别针对LDPC码瀑布区和地板区的性能进行优化. 文献[3-4]分别提出了用外信息转移(extrinsic information transfer, EXIT)函数及密度进化(density evolution, DE)设计门限值低

的LDPC码, 从而改善了瀑布区的性能. 文献[5-6]和文献[7]分别提出了通过改进译码算法或改进LDPC码的编码结构来改善地板区的性能. 然而在一般情况下, 同时提高LDPC码瀑布区和地板区性能较困难, 如文献[8-9]指出了只能对瀑布区和地板区的性能进行折中. 因此, 目前鲜有同时考虑瀑布区和地板区性能的码型优化设计工作.

在加性高斯白噪声(additive white Gaussian

收稿日期: 2011-01-04; 修订日期: 2011-03-29

基金项目: 国家自然科学基金(No.60972053, No.61001073)资助

作者简介: 方毅, 博士生, 研究方向: 信道纠错编码与信息论, E-mail: fangyi1986812@163.com; 王琳, 教授, 博导, 研究方向: 通信物理层算法设计分析与实现, E-mail: wanglin@xmu.edu.cn

noise, AWGN)信道下, 研究人员提出了一系列结构更优的新型LDPC码. 例如, 文献[10]提出了一种基于原模图的LDPC码. 文献[11-12]相继提出了具有原模图结构的重复积累(repeat accumulate, RA)码、AR-3A码、AR4A码及AR4JA码等一系列码型. 这些原模图结构的LDPC码具有编译码复杂度低、码率可扩展、错误地板低及优化分析简单等优点. 其中, AR4JA码的性能优于绝大多数一般LDPC码和其他原模图LDPC码, 且最小距离以很高的概率与帧长呈线性关系^[13-15], 鉴于AR4JA码在结构上的众多优点, 2006年美国太空数据系统咨询委员会(consultative committee for space data systems, CCSDS)将该码型作为深空通信的标准码型推荐给国家航空航天局(national aeronautics and space administration, NASA).

原模图LDPC码的EXIT函数^[16-17]和渐近重量分布^[13]可以分别用来改善原模图LDPC码瀑布区和地板区的性能, 但如何在瀑布区性能与地板区性能之间取得平衡是个很重要的问题. 本文在同时考虑瀑布区和地板区性能的基础上, 提出了一种基于原模图LDPC码的联合优化算法. 该算法可在不增加编译码复杂度的前提下兼顾瀑布区性能, 设计出典型最小距离比(typical minimum distance ratio, TMDR)较大的原模图LDPC码, 从而降低其错误地板. 本文以重复积累(repeat accumulate, RA)码和AR4JA码为参考码型, 通过联合优化算法分别得到了新型RA码和新型ARA码. 仿真结果表明: 与传统的RA码和AR4JA码相比, 1/4码率的新型RA码和1/2码率的新型ARA码的误比特率(bit error rate, BER)在高信噪比区域分别取得了约0.25 dB和0.2 dB的性能增益, 进一步降低了错误地板, 缩小了与香农限的距离, 且新型ARA码的性能增益会随着码率的提高而增加.

1 原模图LDPC码

LDPC码是由稀疏的校验矩阵定义的一种线性分组码, 记为 H 矩阵. 每个校验矩阵都可由一个含有两类节点集合的因子图表示: 一类为代表编码后比特的变量点集合 V , 另一类为代表校验约束关系的校验点集合 C . 由集合 V, C 以及这两类节点之间关联的边所组成的图形称为因子图. 原模图LDPC码可以看作一个由极少变量点和校验点构成的因子图. 类似于LDPC码因子图的定义, 原模图 $G = (V, C, E)$ 也是由变量点集合 V 、校验点集合 C 、连接变量点和校验点的边的集合 E 组成. 原模图中的每条边 $e \in E$ 分别连接一个 $v_i \in V$ 和一个校验点 $c_j \in C$, 每一条边都被看作一类边. 在原模图中是允许度为1的变量点和重边存在的, 因此 $e \rightarrow (v_i, c_j) \in V \times C$ 并不是一一映射

的, 原模图对应的 H 矩阵称为基础矩阵 B .

原模图LDPC码是与导出图相对应的LDPC码. 导出图是由原模图经过重复后再对同类型的边进行交织得到的, 即首先对原模图重复 q 次, 得到由 q 个相互独立的原模图组成的大原模图; 然后在大原模图中对每个同类型的 q 条边用一个交织器进行重排, 经交织后得到的因子图就是导出图. 导出图与LDPC码的因子图在本质上是一样的. 由于导出图是由基础矩阵 B 和扩展规则决定的, 基础矩阵 B 和扩展规则是影响原模图LDPC码性能的两个主要因素. 为了便于分析, 本文假设所有原模图LDPC码的扩展规则都为文献[18]提出的改进型PEG(progressive edge-growth)算法.

作为一个简单的例子, 考虑图1所示的原模图, 其基础矩阵为 B . 图1(a)经过 $q = 2$ 次重复后得到图1(b), 然后对图1(b)中相同类型节点间的边进行置换便得到导出图1(c), 该因子图对应的LDPC码称为原模图LDPC码. 通过改变 q 值可以得到任意码长的原模图LDPC码.

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

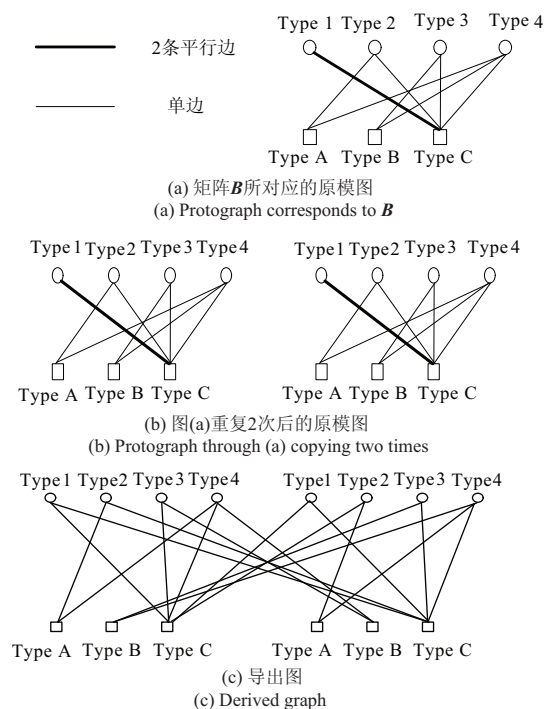


图1 原模图LDPC码因子图的生成过程

Figure 1 Generating procedure of factor graph for protograph LDPC code

2 原模图LDPC码的联合优化算法

本节首先简单介绍原模图LDPC码的两种主要分析方法,并在此基础上提出一种基于原模图LDPC码的联合优化算法.该算法可在不增加编译码复杂度的前提下,略微牺牲瀑布区的性能,设计出比传统原模图LDPC码地板区性能更好的码型.

2.1 原模图LDPC码的两种理论分析方法

2.1.1 原模图LDPC码的EXIT分析

定义1 J 函数 AWGN信道的输出信息 Y 近似服从一致高斯分布(continuous Gaussian distribution),即方差 $\sigma^2 = 2\mu$ (μ 为 Y 的期望)的高斯分布,故定义 $J(\sigma)$ 为该信道的信道容量,表达式为

$$J(\sigma) = 1 - \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{-\frac{(y-\sigma^2/2)^2}{2\sigma^2}} \text{lb}(1 + e^{-y}) dy \quad (1)$$

原模图LDPC码的EXIT^[16-17]可用于分析迭代译码的门限值 γ_{iter} ,因为该值反映了原模图LDPC码在低信噪比区(瀑布区)的性能,故利用原模图的EXIT可设计出瀑布区性能较好的码型.

在AWGN信道下,给定一个 M 行 N 列的基础矩阵 $\mathbf{B} = (b_{ij})$ 对应的原模图,其中 b_{ij} 为 \mathbf{B} 中第 i 行 j 列的值.设定信噪比初始值 E_b/N_o ,单位为dB,其EXIT分析算法如下:

步骤1 首先进行初始化.假设最大迭代次数为 P ,迭代次初始值 $p = 1$;并设 $v_i \rightarrow c_j$ 的先验互信息的初始 $I_{Av}(i, j) = 0$, L_j 为删余标志位.若第 j 个变量点被删余,则 $L_j = 0$;否则 $L_j = 1$;计算每个变量点($j = 1 \sim N$)的初始信道信息

$$I_{\text{ch}}^{(j)} = 8R10^{\frac{E_b/N_o}{10}} L_j \quad (2)$$

转至步骤2.

步骤2 若 $p = P, E_b/N_o = E_b/N_o + 0.001$,转至步骤1;否则,对每个 $j = 1 \sim N, i = 1 \sim M$,分别根据式(3)和(4)计算 $v_j \rightarrow c_i$ 的外信息及 $c_i \rightarrow v_j$ 的先验互信息

$$I_{Ev}(i, j) = J\left(\left(\sum_{s \neq i} b_{sj} [J^{-1}(I_{Av}(s, j))]^2 + (b_{ij} - 1)[J^{-1}(I_{Av}(i, j))]^2 + [J^{-1}(I_{\text{ch}}^{(j)})]^2\right)^{\frac{1}{2}}\right) \quad (3)$$

$$I_{Ac}(i, j) = I_{Ev}(i, j) \quad (4)$$

转至步骤3.

步骤3 对每个 $j = 1 \sim N, i = 1 \sim M$,分别根

据式(5)和(6)计算 $c_i \rightarrow v_j$ 的外信息及 $v_j \rightarrow c_i$ 的先验互信息

$$I_{Ec}(i, j) = \left\{1 - J\left(\left(\sum_{s \neq j} b_{is} [J^{-1}(1 - I_{Ac}(i, s))]^2 + (b_{ij} - 1)[J^{-1}(I_{Ac}(i, j))]^2\right)^{\frac{1}{2}}\right)\right\} \quad (5)$$

$$I_{Av}(i, j) = I_{Ec}(i, j) \quad (6)$$

转至步骤4.

步骤4 对每个 $j = 1 \sim N$,分别计算 v_j 的后验信息

$$I_{APP}(j) = J\left(\sqrt{\sum_s b_{sj} [J^{-1}(I_{Av}(s, j))]^2 + [J^{-1}(I_{\text{ch}}^{(j)})]^2}\right) \quad (7)$$

转至步骤5.

步骤5 若 $\forall j = 1 \sim N$,都有 $I_{APP} = 1$,输出门限值 E_b/N_o ,算法结束;否则设 $p = p + 1$,转至步骤2.

2.1.2 原模图LDPC码的渐近重量分析

给定一个码长为 n 、码率为 R 、汉明距离为 d 的分组码,其传输变量点的平均归一化码重为 $\delta = d/n$.设 A_d 为该码集的重量分布(即码重为 d 的码字数),则该码的归一化渐近重量分布函数为

$$r(\delta) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sup \left(\frac{\ln(A_{\delta n})}{n}\right) \quad (8)$$

对于原模图LDPC码来说,若 $r(\delta)$ 存在过零点,且对于第1个过零点值 $\delta_{\text{min}} > 0$,都有 $r(\delta) < 0$ ($0 < \delta < \delta_{\text{min}}$),则将 δ_{min} 称为典型最小距离比(typical minimum distance ratio, TMDR).此时汉明距离 d 将会以很高的概率满足不等式 $d > \delta_{\text{min}}n$,即有

$$\forall \varepsilon > 0, P(d > \delta_{\text{min}}n) > 1 - \varepsilon \quad (9)$$

由此可以得出最小距离的近似值

$$d_{\text{min}} \approx \delta_{\text{min}}n \quad (10)$$

a) 随机码的渐近重量分布函数

$$r(\delta) = (R - 1) \ln 2 + H(\delta) \quad (11)$$

式中

$$H(x) = -x \ln x - (1 - x) \ln(1 - x) \quad (12)$$

b) 原模图LDPC码的渐近重量分布函数

假设原模图LDPC码的基础矩阵 $\mathbf{B} = (b_{ij})$.该码的传输变量点集合为 $S_t(|S_t| = n_t)$,删余变量点数

为 $n - n_t$, 每个 v_j 的归一化码重及度分别为 x_j 及 q_j^v , 并设每个校验点的度 q_i^c 为 3, 则 $r(\delta)$ 为

$$\begin{aligned}
 r(\delta) = & \max_{x_j \in X} \left\{ \sum_{i=1}^{n_c} a^{c_i}(x_{j1}, x_{j2}, x_{j3}) - \right. \\
 & \left. \sum_{j=1}^{n_v} (q_j^v - 1)H(x_j) \right\} / n_t, \\
 & a^{c_i}(x_{j1}, x_{j2}, x_{j3}) = \\
 & H_4(\sigma - x_{j1}, \sigma - x_{j2}, \sigma - x_{j3}, 1 - \sigma), \\
 & \sigma = (x_{j1} + x_{j2} + x_{j3}) / 2, \\
 & H_4(x_1, x_2, x_3, x_4) = - \sum_{j=1}^4 x_j \ln x_j \quad (13)
 \end{aligned}$$

约束条件为

$$\begin{cases} 0 \leq x_j \leq 1 \\ \max\{x_{j1}, x_{j2}, x_{j3}\} < \sigma < 1 \\ \sum_{x_j \in S_t} x_j = n_t \delta, \quad 0 \leq \delta \leq 1 \end{cases}$$

式中, x_{j1}, x_{j2}, x_{j3} 为与 c_i 关联的 3 个变量点的归一化码重.

说明 由于该算法要求所有校验点的度都为 3, 故当原模图中校验点的度 $q_i^c > 3$ 时, 必须通过拆分算法将该校验点拆分成 $q_i^c - 2$ 个度为 3 的子校验点和 $q_i^c - 3$ 个度为 2 的删余变量点, 然后再进行渐近重量分析. 例如, 度为 4 的校验点拆分算法如图 2 所示:

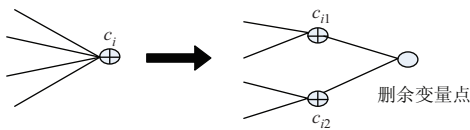


图 2 度为 4 的校验点拆分图

Figure 2 Spitting graph of a degree-four check node

渐近重量分布函数^[14]可以用来分析原模图 LDPC 码在高信噪比区的性能, 设计具有低错误地板的码型. 在给定的码长 n 的前提下, δ_{\min} 越大, 最小码距越大, 错误地板越低. $r(\delta)$ 还可以用来计算最大似然译码门限值 γ_{ml}

$$\gamma_{ml} = \frac{1}{R} \max_{\delta} (1 - e^{-2r(\delta)}) \frac{1 - \delta}{2\delta} \quad (14)$$

式中, R 为码率.

2.2 原模图 LDPC 码的联合优化算法及结果

2.2.1 联合优化算法

在 EXIT 算法和渐近重量分析这两种分析方法的基础上, 本文提出了一种原模图 LDPC 码的联合优化

算法. 该算法同时兼顾了瀑布区和地板区的性能, 即在保证原模图 LDPC 码瀑布区性能的前提下, 改善地板区的性能, 从而降低原模图 LDPC 码的错误地板. 由原模图 LDPC 码的特点可知, 在交织规则给定的情况下, 只需对一个很小的原模图进行优化即可, 如 0.5 码率的 AR3A, AR4JA 等原模图都只有 3 个校验点和 5 个变量点, 这一特点使得原模图 LDPC 码的分析及优化变得非常简单. 因此, 本文所提出的优化算法也是针对校验点数目为 3 的原模图设计的. 给定一个原模图 LDPC 码, 其对应 $M \times N$ 基础矩阵 \mathbf{B} , 行数 $M = 3$. 设该码字的迭代译码门限值、校验点度及典型最小距离比分别为 γ_1, q_i^c 及 $\delta_{\min 1}$, 则该原模图的联合优化算法框图如图 3 所示.

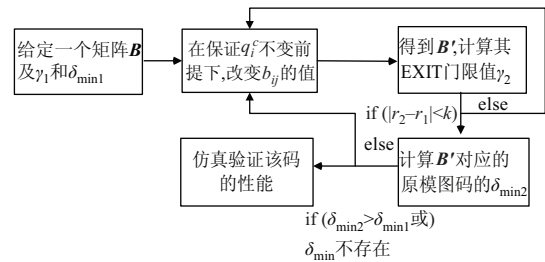


图 3 原模图 LDPC 码优化算法框图

Figure 3 Block diagram of the joint optimizing algorithm for protograph LDPC code

算法具体步骤如下:

步骤 1 给定一个 $M \times N (M = 3)$ 的参考基础矩阵 $\mathbf{B} (|E|$ 条边), 其中 b_{ij} 为 c_i 连接 v_j 的边数. 设预编码标志位为 l_p . 若 \mathbf{B} 对应的原模图存在预编码结构, 则 $l_p = 1$, 并固定 \mathbf{B} 的第 1 行及第 1 列 (保持预编码增益^[10]), 即固定 v_1 和 c_1 所连接的边, 转至步骤 2; 否则 $l_p = 0$, 转至步骤 3.

步骤 2 设 \mathbf{B}' 中的 c'_2 及 c'_3 的度为 $q_2^{c'} = q_2^c, q_3^{c'} = q_3^c$ 或 $q_2^{c'} = q_2^c - 1, q_3^{c'} = q_3^c + 1$ (保持每个校验点的度基本不变); 然后在满足 $\sum_{j=1}^N b_{ij} = q_i^{c'}$ 的前提下随机选取 b_{ij} 的值, 得到 \mathbf{B}' , 转至步骤 4.

步骤 3 取 $q_1^{c'} = q_1^c, q_2^{c'} = q_2^c, q_3^{c'} = q_3^c$, 按步骤 2 的方法选取 b_{ij} , 得到矩阵 \mathbf{B}' ; 转至步骤 4.

步骤 4 计算 \mathbf{B}' 的门限值 γ_2 , 若 $|\gamma_2 - \gamma_1| < k$, 则转至步骤 5; 否则, 当 $l_p = 1$ 时转至步骤 2, 当 $l_p = 0$ 时转至步骤 3.

步骤 5 计算 \mathbf{B}' 的最小距离比 $\delta_{\min 2}$, 当 $\delta_{\min 2}$ 不存在或 $\delta_{\min 2} > \delta_{\min 1}$ 时, 仿真 \mathbf{B}' 的性能, 算法结束; 否则当 $l_p = 1$ 时转至步骤 2, $l_p = 0$ 时转至步骤 3.

在该联合优化算法中, 参数 k 称为门限值调整因子, 它是一个大于 0 的常数, 该参数的取值与具体的通信环境有关. 当 k 取值太大时, 该算法容易找到瀑布区性能比参考码型更优的码, 但这些码的地板区

性能往往不够理想，而且会使算法的矩阵搜索范围扩大，从而增加了算法的复杂度；当 k 取值太小时，不仅会降低地板区域的优化空间，而且不利于找到地板区性能较好的码型，故参数 k 的取值应该综合考虑瀑布区和地板区的性能。通过对实验数据进行统计分析可知， $k = 0.3$ dB 时原模图LDPC码地板区的优化结果较理想。由于优化后的 B' 与 B 的 $|E|$ 相等，两种码的编译码复杂度相同。

由于EXIT基于码长无限长的假设，且EXIT门限值只能反映该码型低信噪比区的性能，故优化算法中门限值的取值并没有要求 $\gamma_2 < \gamma_1$ 。由文献[8-9]可知，瀑布区性能好的码型地板区的性能往往会比较差，故必须对瀑布区和地板区的性能进行折中。为了综合考虑瀑布区和地板区的性能并增大地板区的优化空间，该算法将矩阵的筛选条件取为 $|\gamma_2 - \gamma_1| < k$ ，这样处理能够在略微牺牲瀑布区性能的前提下，最大化找到TMDR值较大的原模图LDPC码的概率。另外，当原模图LDPC码(如RA码)不存在TMDR时(即无法直接确定其高信噪比区的性能)，也能对其进行优化，但此时只能通过门限值条件 $|\gamma_2 - \gamma_1| < k$ 来对原模图进行筛选，然后再对筛选出来的原模图LDPC码进行仿真验证其性能。

该优化算法的时间复杂度为 $O(M \cdot N^{N/2})$ ，虽然随 $N/2$ 呈指数增长，但原模图的基础矩阵 B 是一个非常小的矩阵(任何码率和码长的原模图都可以由一个 B 矩阵扩展而成)，一般有 $M \leq 5, N < 8$ ，因此该优化算法的复杂度 ($O(M \cdot N^{N/2})$) 是可以接受的。例如，在Intel Core 2 Quad Q660 2.39 GHz 处理器的计算机上用MATLAB仿真，RA码和AR4JA码矩阵的优化算法运行时间约为 4.22 h 和 15.38 h，这个仿真时间对于找到一个好码来说是可接受的。

2.2.2 RA码和AR4JA码的优化结果

a) RA码的优化

码率 $R = 1/4$ 的RA码(不删余 v_1) 的编码框图和原模图如 4 所示，其EXIT门限值为 $\gamma_{B1} = 0.59$ dB，基础矩阵记为 B_1 。

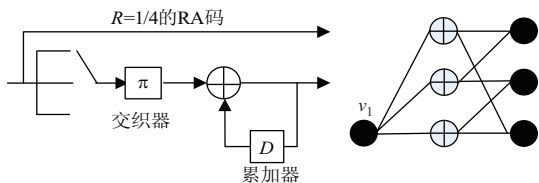


图 4 RA码的编码框图及原模图

Figure 4 Coding block diagram and protograph of RA code

通过优化算法可得到 $R = 1/4$ 的新型RA码 ($n_t = 4$)，其基础矩阵记为 B_2 。新型RA码的原模图如图 5 所

示，EXIT门限值为 $\gamma_{B2} = 0.59$ dB, ($|\gamma_{B2} - \gamma_{B1}| < 0.3$ dB)。

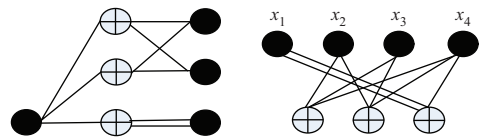


图 5 新型RA码原模图及渐近重量分析等效因子图

Figure 5 Protograph and equivalent protograph for asymptotic weight enumeration of the improved RA code

新型RA码的渐近重量分布函数式为

$$r(\delta) = \max_{\sum_{j=1}^4 x_j = 4\delta} \{a^{c_1}(x_2, x_3, x_4) + a^{c_2}(x_2, x_3, x_4) + a^{c_3}(x_1, x_1, x_4) - 2 \sum_{j=1}^4 H(x_j)\} / 4 \quad (15)$$

式中， x_i 为 v_i 的归一化码重。

分析表明这两种码的 $r(\delta)$ 都不存在过零点，故无法通过 δ_{\min} 值来判断地板区的性能。这两种码的渐近重量分布曲线如图 6 所示，从图 6 可看出两种码的渐近重量分布曲线基本重合，且都没有过零点。这说明通过优化算法得到的原模图满足条件 $|\gamma_2 - \gamma_1| < k$ ，但不存在 δ_{\min} ，因此无法直接与参考码型比较地板区性能。此时需通过仿真来比较地板区性能，仿真表明新型RA码与传统RA码相比在高信噪比区有约 0.25 dB 性能增益，性能比较曲线将在仿真结果中给出。

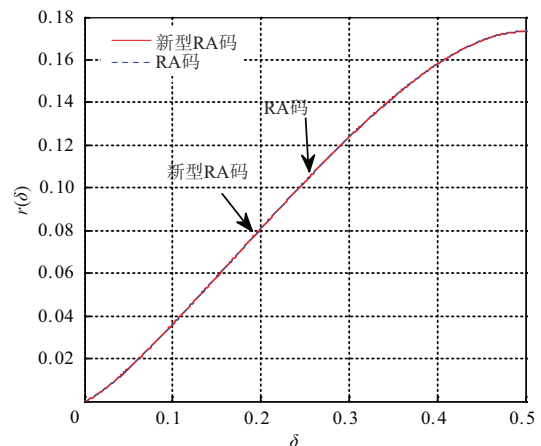


图 6 新型RA码与RA码的渐近重量分布

Figure 6 Asymptotic weight enumerations for improved RA code and conventional RA code

b) AR4JA码的优化

AR4JA码是目前广泛使用的一类原模图LDPC码，它具有最小码距随着码长呈线性增长、地

板区性能非常优越、码率可变等优点. AR4JA的原模图如图7所示, 其中实心圆代表传输比特, 空心圆代表删余变量点, 含加号的圆代表校验点.

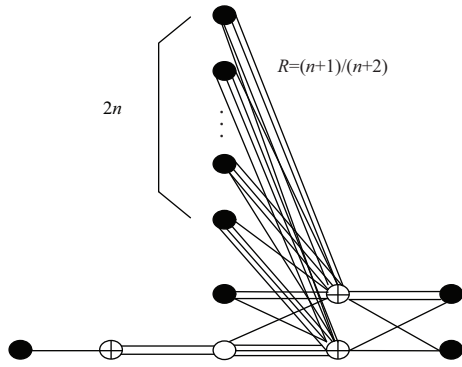


图7 AR4JA码原模图

Figure 7 Protograph of AR4JA code

首先根据联合优化算法对0.5码率的AR4JA(基础矩阵为 B_A)进行优化, 再用与AR4JA相同的扩展方式向高码率扩展. 优化得到不同于AR4JA码的新型ARA码, 称为IARA1(improved ARA1)及IARA2, 这两种码型的基础矩阵分别记为 B_{A1} 及 B_{A2} . 0.5码率的AR4JA, IARA1及IARA2原模图如图8所示.

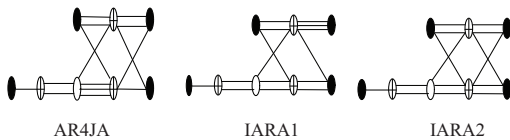


图8 $R = 0.5$ 的AR4JA, IARA1及IARA2原模图

Figure 8 Protographs of AR4JA, IARA1 and IARA2 codes ($R = 1/2$)

通过对0.5码率的3种码进行EXIT及渐近重量分析可以分别得到它们的门限值, 典型最小距离比等参数如表1所示. 图9为其渐近重量分布曲线.

表1 AR4JA, IARA1及IARA2的最大似然译码门限值、EXIT门限值、TMDR值及原模图边数

Table 1 Maximum likelihood threshold, EXIT threshold, TMDR and edges of AR4JA, IARA1 and IARA2 codes

码型	γ_{ml}/dB	γ_{iter}/dB	δ_{\min}	$ E $
AR4JA	0.356	0.626	0.015	15
IARA1	0.409	0.807	0.025	15
IARA2	0.377	0.869	0.028	15

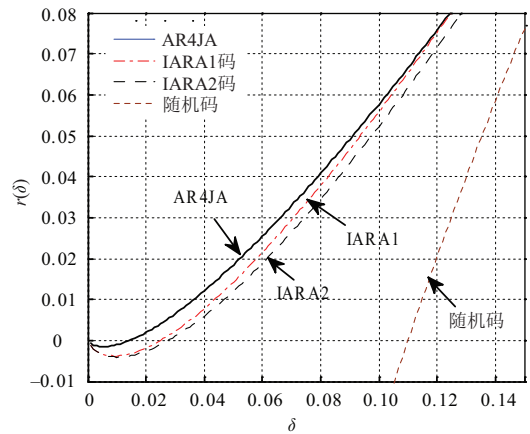


图9 0.5码率的3种ARA码及随机码的渐近重量分布曲线

Figure 9 Asymptotic weight enumerations for three types of ARA and random codes ($R = 1/2$)

通过表1和图9可知, 这3种ARA码的迭代译码门限值比较接近, 且它们的渐近重量分布函数都存在过零点. IARA1, IARA2的TMDR值都比AR4JA的TMDR值大, 故其地板区性能优于AR4JA, 其中IARA2的地板区性能最好. 由表1可以看出, 新型ARA码门限值稍大于AR4JA, 但TMDR值却接近于它的两倍, 说明该算法以略牺牲瀑布区性能为代价, 显著降低了原模图LDPC码的错误地板. 从表1中还可看出3种码原模图的总边数 $|E|$ 都为15, 因此3种码的编译码复杂度基本相同(原模图LDPC码的每条边都对应一个交织器, 且其迭代译码是通过因子图中的边传递信息, 因此原模图的边数可用来近似度量编译码复杂度).

而且由码型设计经验可知, 对于同一种高码率扩展方式的原模图而言, 基矩阵($R = 1/2$)性能好的码型向高码率扩展后可保持其性能优势, 并且这种性能优势随着码率的增加会更加明显. 第3节的仿真结果也验证了这个结论.

3 仿真结果及分析

本节分别给出了通过优化算法所设计出的新型RA码与传统RA码的性能比较曲线, 以及IARA1, IARA2与AR4JA的性能比较曲线, 并对仿真结果进行了进一步的分析. 仿真信道为AWGN信道, 调制方式为BPSK, 译码算法采用BP译码算法.

首先对 $R = 1/4$ 、信息长 $k = 1024$ 的新型RA码与传统的RA码进行了性能仿真, 其BER及FER比较曲线如图10所示. 由图10可知, 与传统RA码相比, 新型RA码在低信噪比和高信噪比区的性能都有明显的改善, 尤其是在高信噪比区($\text{BER} = 10^{-6}$), 性

能增益约为0.25 dB. 由于这两种码型度为2的变
量点数等于与之关联的校验点数, 这种特性导致该码
的渐近重量分布不存在过零点, 但通过门限值条件
 $|\gamma_2 - \gamma_1| < k$ 的筛选仍然可以得到性能更优的原模
图LDPC码.

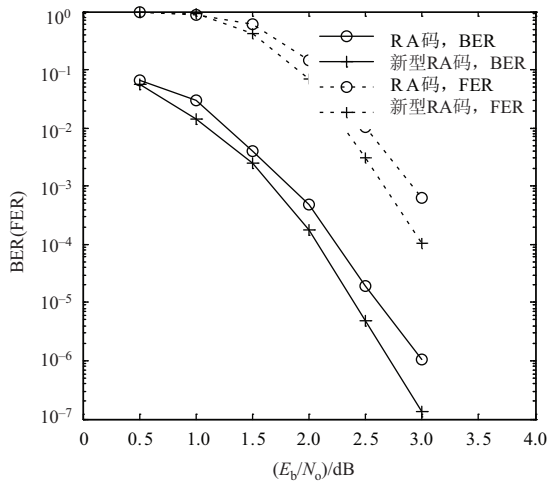


图10 新型RA码与RA码的性能比较曲线

Figure 10 Performance comparison between new RA and conventional RA codes

对于IARA1, IARA2及AR4JA这3种码型的仿
真, 首先对 $R = 0.5, k = 512$ 及 768 的两类短码进行
性能仿真, 以验证第2节的分析结果; 再进行高码
率扩展, 分别对信息长 $k = 1024$, 码率 R 为 $2/3, 4/5,$
 $8/9$ 的3种码的性能进行比较. 图11分别给出了0.5码
率的3种ARA码 ($k = 512, 768$) 的性能比较曲线, 从该
图可知, 在高信噪比区 $k = 512$ 的IARA1, IARA2码
性能比AR4JA约提升0.2 dB, 其中IARA1距香农
限2.3 dB. 由图11还可以看出, 优化得到的IARA码
在 k 较小时性能增益更加明显, 这是由于短码距离香
农限更远导致的. 高码率的3种码 ($k = 1024$) 的性
能比较曲线如图12所示. 从图12中容易看出, 当码
率大于0.5时, IARA1和IARA2同样保持了性能优势,
且性能增益随着码率的提高而增加; 当 $R = 8/9$ 时,
IARA1及IARA2在高信噪比区的BER性能比AR4JA
约提高了0.15 dB, 并且IARA2性能略好于IARA1.

仿真结果表明, 在AWGN信道下, 通过优化算法
得到的新型RA码和IARA1, IARA2码的BER及FER
性能和理论分析结果相吻合. 这3种新型的原模
图LDPC码能够在不增加编译码复杂度的前提下,
兼顾低信噪比区性能, 显著改善高信噪比区的性
能. 新型的RA码在高信噪比区相对于RA的性能增
益约为0.25 dB; 不同码率的新型ARA码在高信噪
比区的性能都优于AR4JA, 并且其性能增益随着码
率的增加而逐渐增加. 由仿真结果可知, EXIT门限值

和TMDR值可以较准确地反映原模图LDPC码瀑布区
和地板区的性能, 本文提出的联合优化算法也可以
在保证瀑布区性能的前提下设计出地板区性能优越
的原模图LDPC码.

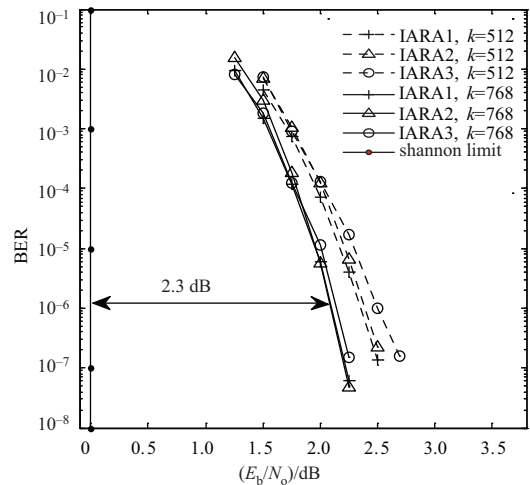


图11 $R = 0.5$ 的AR4JA, IARA1, IARA2的BER性能比较
曲线; $k = 768, 512$ (从左至右)

Figure 11 BER Performance curves for rate 1/2
AR4JA, IARA1 and IARA2 codes with
 $k = 768$ and 512 (from left to right)

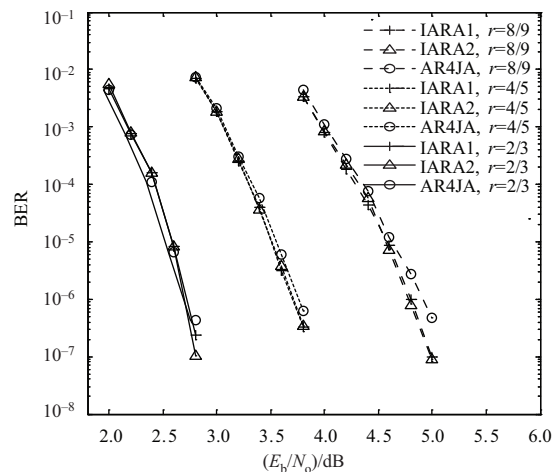


图12 $k = 1024$ 的AR4JA, IARA1, IARA2的BER性能比
较曲线; $R = 2/3, 4/5, 8/9$ (从左至右)

Figure 12 Performance curves for AR4JA, IARA1
and IARA2 codes with rate $2/3, 4/5, 8/9$
(from left to right) and $k = 1024$

4 结 语

本文提出一种基于原模图LDPC码的联合优化算
法, 该算法可在兼顾瀑布区性能的前提下设计出地
板区性能比参考码型更优的原模图LDPC码, 并且不
会增加编译码复杂度. 由仿真结果可知, $1/4$ 码率的

新型RA码($k = 1024$)和 $1/2$ 码率的新型ARA码($k = 512$)在高信噪比区性能分别比传统RA码和AR4JA提高了约0.25 dB和0.2 dB;高码率的新型ARA码地板区性能同样优于AR4JA码,并且其性能增益会随着码率的提高而增加.而且对于同一码率来说,码长较短时性能增益更加明显.本文提出的联合优化算法适用于任何原模图LDPC码,并能为AWGN信道下原模图LDPC码的优化设计提供一种新的思路.

参考文献:

- [1] GALLAGER R G. Low-density parity-check codes [M]. MA: MIT Press, 1963.
- [2] MACHKAY D J C, NEAL R M. Near Shannon limit performance of low density parity check codes [J]. IEEE Electronics Letters, 1996, 32(18): 1645-1646.
- [3] BRINK S T, KRAMER G, ASHIKHMIN A. Design of low-density parity-check codes for modulation and detection [J]. IEEE Transactions on Communications, 2004, 52(4): 670-678.
- [4] RICHARDSON T J, URBANKE R L. The capacity of low-density-parity-check codes under message-passing decoding [J]. IEEE Transactions on Information Theory, 2001, 47(2): 599-618.
- [5] KANG Jingyu, ZHANG li, DING Zhi, LIN Shu. A two-stage iterative decoding of LDPC codes for lowering error floors[C]//IEEE Global Telecommunications Conference, New Orleans, 2008: 1-4.
- [6] FANG Yi, ZHANG Jianwen, WANG Lin, LAU F C M. BP-Maxwell decoding algorithm for LDPC codes over AWGN channels[C]//IEEE International Conference on Wireless Communication, Networking, and Mobile Computing, Chengdu, 2010: 1-4.
- [7] RICHARDSON T J, URBANKE R L. Multi-edge type LDPC codes[C]//Workshop Honoring Professor Bob McEliece on His 60th Birthday, California Institute of Technology, Pasadena, California, May 24-25, 2002.
- [8] ROSNES E, YTREHUS O. On the design of bit-interleaved Turbo-coded modulation with low error floors [J]. IEEE Transactions on Communications. 2006, 54(9): 1563-1573.
- [9] HE Z Y, FOTIER P, ROY S. A class of irregular LDPC codes with low error floor and low encoding complexity [J]. IEEE Communications Letters. 2006, 10(5): 372-374.
- [10] THORPE J. Low-density parity-check (LDPC) codes constructed from protographs [C]//IPN Progress Report, JPL, 2003: 42-154.
- [11] DIVSALAR D. Protograph based LDPC codes with minimum distance linearly growing with block size [C]//IEEE Global Telecommunications Conference, ST.louis, 2005: 1152-1156.
- [12] ABBASFAR A, DIVSALAR D, YAO Kun. Accumulate repeat accumulate codes [J]. IEEE Transaction on Communications, 2007, 55(4): 692-702.
- [13] DIVSALAR D. Ensemble weight enumerators for protograph LDPC codes [C]//IEEE International Symposium on Information Theory, Seattle, Washington, 2006: 1554-1558.
- [14] DIVSALAR D, DOLINAR S, JONS C R, ANDREWS K. Capacity-approaching protograph codes [J]. IEEE Journal on Selected Areas in Communications, 2009, 27(6): 876-888.
- [15] SURRA A, DIVSALAR D, RYAN W E. On the existence of typical minimum distance for protograph-based LDPC codes [C]// IEEE International Symposium on Information Theory, Austin, Texas, 2010: 719-723.
- [16] LIVA G, SONG S, LAN L, ZHANG Y, LIN S, RYAN W. Design of LDPC codes: a survey and new results [J]. Journal of Communication Software and Systems, 2006.
- [17] LIVA G, CHIANI M. Protograph LDPC codes design based on EXIT analysis [C]//IEEE Global Telecommunications Conference, Washington, D.C, 2007: 3250-3254.
- [18] BONELLO N, CHEN Sheng, HANZO L. Construction of regular quasi-cyclic protograph LDPC codes based on vandermonde matrices [J]. IEEE Transactions on Vehicular Technology, 2008, 57(4): 2583-2588.

(编辑: 秦 巍)